**Vor Gödel**

Um zu verstehen was Gödel geleistet hat, muss man sich erst einmal zwei andere wichtige Mathematiker anschauen: [Georg Cantor](https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor), erfinder der [Mengenlehre](https://de.wikipedia.org/wiki/Mengenlehre) und [David Hilbert](https://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert), einer der bekanntesten nd annerkantesten Mathematiker zu seiner Zeit.

Fangen wir mit Cantor an; In den 1870ern erschaff er die Mengenlehre, er selbst bezog sich debei in erster Linie auf Zahlenmengen (die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen, die reellen Zahlen, etc.), wobei sich auch auf Mengen von praktisch allem bilden lassen; alle Menschen der Welt bilden eine Menge, so aber auch alle Universitäten. Es gibt die leere Menge die nichts beeinhaltet, aber auch eine Menge die alles beeinhaltet.

Cantor wunderte sich, ob es mehr natürliche Zahlen oder mehr reelle Zahlen zwischen 0 und 1 gibt. Der erste Gedanke ist natürlich, dass es von beiden unendlich gibt, also sind beide Mengen auch gleich groß. Cantor hatte allerdings eine Idee: Er bewies durch das sogennante [Diagonalargument](https://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_zweites_Diagonalargument) dass es mehr reele als natürliche Zahlen gibt.

Die Idee dass größere und kleinere Unendlichkeiten gibt spaltete die Mathematische Welt in zwei, die sogennanten Intuisten, die glaubten dass Cantors Arbeit nonsense war und die Mathematik eine pure Kreation des Menschlichen Gehirns war, und auf der anderen Seite die Formalisten, die daran glaubten dass alles in der Mathematik sich durch logische Fundamente erklären lässt. Der quasi Anführer der Formalisten war der zuvor erwähnte David Hilbert. Hilbert war zu der Zeit eine lebende Legende, war sehr anerkannt und arbeitete in nahezu jedem Bereich der Mathematik. Er war davon überzeugt dass Cantors arbeit revulutionär war.

Doch die Mengenlehre hat einen großes Problem; das Problem der Selbstreferenz, als Beispiel dazu kann man sich das Barbier-Paradox anschauen:

In einer Stadt die nur aus bärtigen Männern besteht, gibt es einen einzigen Barbier, der allen den Bart rasieren, die ihn sich nicht selbst rasieren. Wer rasiert nun also dem Barbier den Bart? Wenn er ihn sich selbst rasiert, dann gehört er zu den Männern die ihn sich selbst rasieren, damit darf er ihn sich also nicht rasieren. Das bedeutet allerding dass er ihn sich rasieren muss.

Das ist das Problem der Selbstreferenz, und es wurde "behoben" in dem man definiert dass eine Menge sich nicht selbstbeinhalten darf, allerdings, wie später erkannt wurde löste das das Problem nicht ganz.

**Was hat nun also Gödel damit zu tun?**

1930 gab Hilbert eine Rede, über seine drei Fragen der Mathematik, die nach den zuvor beschriebenen Ereignissen enstanden:

1. Ist die Mathematik komplett? In anderen Worten ist es möglich, jede wahre Aussage zu beweisen?
2. Its die Mathematikk konsistent? Gibt also keine Wiedersprüche?
3. Ist die Mathematik entscheitbar? Gibt es also einen Algorythmus, der immer entscheiden kann ob etwas wahr oder falsch ist anhand der Axiome?

Hilberts Meinung, war die Antowrt zu allen drei Fragen ja. Seine Rede war monumental und er beendete sie mit den Worten "We must know - we will know".

Doch noch am Abend davor erklärte Kurt Gödel, dass er die Antwort auf die erste der drei Fragen gefunden hat, und die Antowrt nein lautete. Zu dieser Zeit hatte ihm kaum jemand Aufmerksamkeit geschenkt, die einzige Person war John von Neuman, der ein paar Fragen stellte. Doch das nächste Jahr veröffentlichte Gödel seinen "Unvollständigkeitssatz", und alle, einschließend Hilbert, wurden darauf aufmerksam.

**Gödels Zahlensystem**

Gödel hat jedem zeichen des Mathematischen logik Systems (Also ~ für nicht, v für oder, -> für Schlussfolgerung, etc.) eine Zahl zugewiesen. Das nicht-Symblo ist 1, das oder-Symbol 2 und so weiter und sofort. Diese Zahlen werden Gödelzahlen genannt. Die Zahl null bekommt ihre eigene Gödel-Zahl, die 6 und um jede andere Zahl darzustellen benutzt man das "Nachfolger von" Symbol, um die eins darzustellen nimmt man also den Nachfolger von null. und wenn man die zwei darstellen möchte dann nimmt man den Nachfolger des Nachfolgers von null.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Symbol** | **Gödel-Zahl** | **Bedeutung** |
| ~ | 1 | nicht |
| v | 2 | oder |
| ⊃ | 3 | wenn...dann... |
| ∃ | 4 | es existiert |
| = | 5 | gleich |
| 0 | 6 | null |
| S | 7 | der Nachfolger von |
| ( | 8 | offene Klammer |
| ) | 9 | geschlossene Klammer |
| , | 10 | Komma |
| + | 11 | plus |
| x | 12 | mal |
| Daraufhin folgen Buchstaben die representieren Variablen (x, y, z, ...), die wiederrum Primzahlen größer als 12 zugewiesen werden (13, 17, 19, ...). | | |

Nun kann man jede logische oder mathematische Aussage mit einer einzelnen Zahl darstellen, indem man jeder der einzelnen Gödel-Zahlen der Aussage als Exponent von Primzahlen nimmt.

Wenn man also 0 = 0 darstellen möchte, braucht man die Gödel-Zahlen für null und das gleich Symbol, diese sind 6 und 5. Nun nimmt man sie als Exponenten der Primzahlen startend von 2.

2⁶ × 3⁵ × 5⁶, also 243.000.000

Diese Zahl kann man durch Primfaktorzerlegung immer auf ihre originalen Gödelzahlen, und damit auch auf die Originale Aussage.

Man kann nun aber auch Axiome darstellen, zum Beispiel:

~(sx = 0)

Was wörtlich bedeutet „Der Nachfolger von x ist nicht 0“, was sinn macht, da es in Gödels System keine negativen Zahlen gibt.

Nun kann man für x 0 einsetzen:

~(s0 = 0)

Was wörtlich bedeutet „ Der Nachfolger von 0 (also 1) ist nicht 0“, Das ist der Beweis dass 1 nicht 0 ist.

Man kann nun auch diese zwei Axiome, die beide ihre eigenen Gödelzahlen haben, als Potenzen für die Primzahlen benutzen und erhält somit eine neue Zahl, die für den Beweis „1 ist nicht 0“ steht. Diese Zahl ist unglaublich groß, wenn man sie komplett ausschreiben würde hätte sie 73 Million Ziffern, weswegen man diese Zahlen auch einfach als Buchstaben bennen kann. Man kann also z.B. sagen der Beweis dass 1 nicht 0 ist, ist die Gödelzahl a.

**Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz**

All das hat Gödel sich ausgedacht für eine bestimmte Gödelzahl:

~ ∃x(Dem(ySub(17,y)))

Was wörtlich bedeutet: „Es gibt keinen Beweis für die Gödelzahl g“, der Trick dabei ist, dass die Aussage selbst die Gödelzahl g trägt.

Was die Zahl g also aussagt, ist dass sie selbst nicht beweisbar ist.

Wenn diese Aussage nicht simmt, und es eine Gödelzahl gibt die diese Aussage beweist, dann entsteht ein Wiederspruch, was Gilberts zweiten Aussage wiederspricht. Wenn diese allerdings stimmt, dann gibt es ein Mathematisches System, in dem es Aussagen gibt die man nicht beweisen kann, was Gilberts ersten Aussage Wiederspricht.

In jedem Fall hatte Gilbert unrecht.